بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
دوازدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۰

سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
۳۹	-	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۹ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

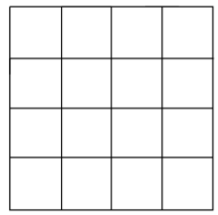
www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی A، B و C از U = {۱، ۲، ۳، ۴، ۵} انتخاب کرد به طوری که $A \cap B = C$

الف) 2^7 ب) 3×2^7 ج) 5×2^7 د) 2^{10} ه) 3×2^{10}

۲- می‌خواهیم خانه‌های جدول زیر را به سه رنگ چنان رنگ آمیزی کنیم که هیچ دو خانه‌ای که مجاورند، (یعنی ظلع مشترک دارند) هم رنگ نباشند. حداقل چند خانه باید رنگ آمیزی شود تا رنگ بقیه‌ی خانه‌ها به طور یکتا مشخص شود؟

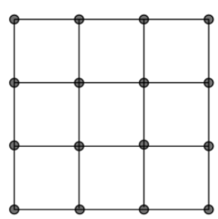


الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۳- روی یک دایره اعداد ۱ تا ۸ را به ترتیب ساعت گرد چیده‌ایم. از عدد ۱ شروع می‌کنیم و در هر مرحله یا به عدد بعدی (در جهت ساعت گرد) می‌رویم و یا از روی عدد بعـــدی می‌پریـم و بـه عدد پـس از آن می‌رویـم. وقتـی کـه دوبـاره به ۱ رسـیدیـم متـوقف می‌شـویـم. می دانیم که از ابتدای کار تا این لحظه ۱ بار از روی ۴ پریده‌ایم. به چند حالت ممکن است این کار را کرده باشیم؟

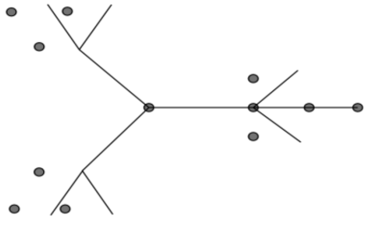
الف) کمتر از ۵۰۰ طریق ب) بین ۵۰۰ و ۱۰۰۰ طریق ج) بین ۱۰۰۱ و ۲۰۰۰ طریق
د) بین ۲۰۰۱ و ۴۰۰۰ طریق ه) بیشتر از ۴۰۰۰ طریق

۴- شکل روبرو از ۲۴ پاره خط و ۱۶ نقطه تشکیل شده است. می‌بینید که در بیش‌ترین حالت برای رفتن از یک نقطه به یک نقطه دیگر باید از حداقل ۶ پاره خط بگذریم. می‌خواهیم از مجموع ۱۸ قطر مربع‌های کوچک ۲ تا را رسم کنیـم تا در بیـش‌ترین حالت بـا پیمایش ۵ پاره خط بتوان از هر نقطه به هر نقطه‌ی دیگر رسید. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟



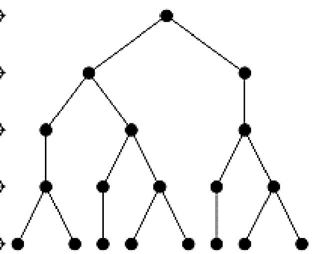
الف) صفر ب) ۱ ج) ۹ د) ۸۱ ه) ۱۲

۵- شکل روبرو ۱۲ رأس دارد که ۱۱ زوج آن با پاره خط‌هایی به هم وصل شده‌اند . می‌خواهیم هرکدام از رأس ها را با یکی از سه رنگ موجود رنگ کنیم به طوری که هیچ ۲ رءس متصل به هم، یک رنگ نشوند. به چند طریـــق این کار ممکن است؟



الف) کمتر از ۱۰۰۰ طریق ب) بین ۱۰۰۰ و ۳۰۰۰ طریق
ج) بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ طریق د) بین ۶۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ طریق
ه) بین ۲۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ طریق

۶- یک بازی دو نفره روی ۸ رأس ردیف ۱ شکل روبرو به این صورت انجام می‌شود: هر کس در نوبت خود یکی از این ۸ رءس که تا به حال رنگ نشده را انتخاب می‌کند و آن را به رنگ خود در می‌آورد. رنگ مربوط به یکی از دو نفر سبز و رنگ مربوط به دیگری قرمز است.



پس از پایان این کار، از ردیف دوم شروع می‌کنیم و هر رأس که از پایین فقط به یک رأس متصل است آن را به همان رنگ و اگر به ۲ رأس وصل باشد، در صورتی که آن ۲ رأس هم رنگ باشند، آن را به رنگ قرمز و اگر نه، به رنگ سبز در می‌آوریم. این کار را سطح به سطح انجام می‌دهیم تا به سطح پنجم برسیم. در نهایت صاحب رنگ رأس ردیف پنجم برنده است. چه کسی امکان برد حتمی را دارد؟

الف) نفر اول ب) نفر دوم ج) صاحب رنگ سبز د)صاحب رنگ قرمز ه) هیچکدام

تعریف زیر را برای سه سؤال بعدی در نظر بگیرید: یک جدول $n \times m$ که در هر خانه آن یک عدد صحیح قرار می‌گیرد را شمارنده می‌گوییم. اگر اختلاف عدد نوشته شده در هر دو خانه مجاور (سطری یا ستونی) آن دقیقاً یک باشد. به عنوان نمونه جدول روبرو یک جدول شمارنده ۳ × ۲ است.

۲	۳	۲
۳	۲	۱

۷- می‌خواهیم در حداقل تعداد خانه‌های یک جدول $n \times m$ عدد بگذرایم به طوری که در بقیه خانه‌ها فقط به یک طریق بتوان عدد گذاشته تا حاصل یک جدول شمارنده باشد. این حداقل در چه بازه‌ای قرار دارد؟

الف) ۱ یا ۲ ب) $[m+n-1, ۳]$ ج) $[\frac{mn}{۲}, m+n]$ د) $[mn-۱, \frac{mn}{۲}]$ ه) دقیقاً mn

۸- یک جدول شمارنده $n \times m$ که روی همه‌ی خانه‌های آن را پوشانیده‌اند، داده شده است. می‌خواهیم پوشش روی حداقل تعداد خانه‌های آن را برداریم (عددهای آن برای ما مشخص شود) که بتوانیم عدد بقیه‌ی خانه‌ها را حدس بزنیم. حداقل در چه بازه‌ای قرار دارد؟

الف) ۱ یا ۲ ب) $[m+n-1, ۳]$ ج) $[\frac{mn}{۲}, m+n]$ د) $[mn-۱, \frac{mn}{۲}]$ ه) دقیقاً mn

۹- چند جدول شمارنده ۵ × ۲ وجود دارد که در خانه بالا و سمت چپ آن عدد یک قرار داده شده است؟

الف) بین ۱ تا ۴۰ عدد ب) بین ۴۱ تا ۱۳۰ عدد ج) بین ۱۳۱ تا ۲۰۰ عدد د) بین ۲۰۱ تا ۲۸۰ عدد ه) بیش از ۲۸۰ عدد

۱۰- فرض کنید تعدادی سنگ ریزه روی میز است. دو نفر باهم این بازی را (نوبتی) انجام می‌دهند: هرکس در نوبت خودش می‌تواند d سنگ ریزه از روی میز بردارد، به این شرط که تعداد سنگ ریزه‌های روی میز بر d بخش پذیر باشد و از d بزرگ تر باشد. هرکس با حرکتش باعث شود ۱ سنگریزه باقی بماند برنده می‌شود. اگر تعداد سنگ ریزه‌های اولیه در ۹ بازی انجام شده به ترتیب ۲، ۳، ...، و ۱۰ باشد، در چند تا از این بازی‌ها نفر اول می‌تواند برنده شود؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۱۱- یک شبکه $n \times m$ از نقاط را در نظر بگیرید که در آن فاصله‌ی نقاط مجاور برابر ۱ است (افقی و عمودی). می‌خواهیم با کشیدن تعدادی خط با طول ۱ بین خانه‌های مجاور کاری کنیم که از هر نقطه بتوان با استفاده از این خطوط به هر نقطه‌ی دیگری رفت. در ضمن می‌خواهیم اگر هر یک از خطوط به طول ۱ کشیده شده، پاک شود، باز هم این خاصیت حفظ شود، یعنی باز هم بتوان از هر نقطه به نقطه‌ی دیگر رفت. اگر $m = ۵$ و $n = ۳$، حداقل تعداد خطوط چند است؟

الف) ۱۳ ب)۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۷ ه) ۱۸

۱۲- فرض کنید شبکه‌ای ۵ × ۴ از نقاط داریم که خانه‌ها با فاصله‌های منظم ۱ از هم قرار دارند و بین بعضی از خانه‌ها با فاصله ۱ خطوطی رسم شده است. یک ماشین در اختیار داریم که اگر شبکه‌ای را به او بدهیم یک شبکه عیناً مثل همان برای ما می‌سازد. در این صورت، ما دو شبکه عین هم خواهیم داشت. ما هم حق داریم این دو شبکه را هر طوری که بخواهیم روی هم بیندازیم: می‌توانیم شبکه‌ها را از صفحه جدا کنیم و در فضا بچرخانیم، فقط ابعاد دو شبکه باید بر هم منطبق باشند. یعنی باز هم یک شبکه ۶ × ۵ از نقاط خواهیم داشت. حالا دو نقطه مجاور به هم وصل هستند. اگر در حداقل یکی از شبکه‌هایی که روی هم رفته‌اند این دو به هم وصل بوده باشند مثلاً از شبکه راست به چپ برسیم. می‌خواهیم با تعدادی بار استفاده از این ماشین شبکه پر شود (تمام خانه‌های مجاور با فاصله ۱ به هم وصل شوند) حداقل تعداد خطوط اولیه چقدر می‌تواند باشد؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۳

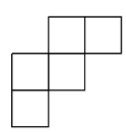
۱۳- دو مرکز گازرسانی و ۶ شهر داریم. می‌خواهیم از مراکز گازرسانی به شهرها لوله کشی کنیم، به طوری که از هر مرکز گازرسانی ۶ لوله خارج شده باشد و هر شهر ۲ لوله وارد شده باشد. اشکالی ندارد که در این لوله کشی‌ها از یک مرکز گازرسانی به یک شهر ۲ خط لوله کشیده شود. به چند طریق می‌توانیم لوله کشی کنیم؟

الف) ۱ ب) ۱۲۱ ج) ۱۴۱ د) ۹۲۴ ه) ۱۸۴۸

۱۴- سکه ای روی صفحه‌ی مختصات در نقطه‌ای با مختصات نامنفی قرار دارد. در هر لحظه یک تراز یکی از پای عمودهای سکه بر یکی از محورها راه می‌افتد به سمت سکه، سکه را بر می‌دارد. ۹۰ درجه به سمت راست یا چپ می‌پیچد. همان قدر که آمده می‌رود. اگر در فضای به مختصات نامنفی بود سکه را می‌گذارد و گرنه سکه را به جای اولش برمی‌گرداند. در طی این اعمال سکه از کدام مختصات می‌تواند به کدام مختصات رفته باشد. (عدد را جای تست بگذار نه ضربش را.)

الف) از (۳۵، ۸۴) به (۴۹، ۹۱) ب) از (۴۲، ۳۰) به (۶۰، ۳۶) ج) از (۱۲، ۹) به (۲۰، ۱۵)
د) از (۵، ۰) به (۰، ۱۰) ه) از (۷۷، ۵۵) به (۱۱، ۷)

۱۵- به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۵ را در خانه‌های شکل مقابل قرار داد، به طوری که عدد مربوط به هر خانه از اعداد خانه‌های سمت راست و پایین آن خانه (در صورت وجود) کوچک تر باشد؟



الف) ۱۴ ب) ۲۸ ج) ۱۳ د) ۱۶ ه) ۸

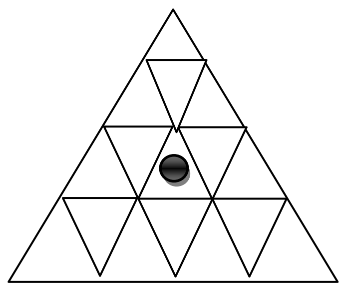
۱۶- برای جایگشت p از اعداد ۱ تا n، $f(p)$ را تعریف می‌کنیم $\sum_{i=1}^{n} |p_i - i|$. میانگین $f(p)$ برای کل جایگشت‌های ۷ تایی چند است؟

الف) ۱۴ ب) ۱۶ ج) ۲۱ د) ۰ ه) ۷

۱۷- تعداد جایگشت‌های π از اعداد ۱ تا ۷ را بیابید که برای هر $1 \le i \le n-3$ داشته باشیم $\pi_i < \pi_{i+3}$

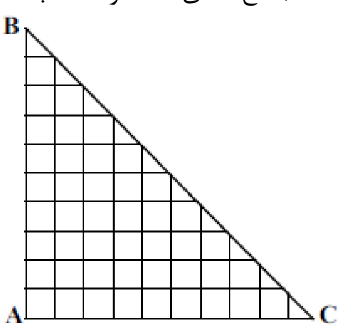
الف) ۲۱۰ ب) ۵۰۴۰ ج) ۳۱۵ د) ۱۴۰ ه) ۱۰۵

۱۸- در ساختن بنای ساختمان شکل روبه رو فقط از آجرهایی استفاده می‌شود که تمام سطح آن‌ها آینه است. دیوار دور ساختمان ساخته شده است می‌خواهیم روی ماکزیمم تعداد از خط چین‌های شکل دیوار بسازیم که از مرکز ساختمان تمام نقاط دیده شود. این تعداد چند تا است؟



الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) هیچ کدام

۱۹- فردی از محل A می‌خواهد با حرکت‌های افقی و عمودی به نقطه‌ای از خیابان اصلی شهر برسد (ضلع BC) برسد به طوری که مسیری که طی می‌کند کوتاه‌ترین مسیر باشد و از ابتدای شروع حرکت تا انتها دقیقاً در ۳ مکان تغییر جهت بدهد. (ضلع‌های AB و AC به ۱۰ قسمت مساوی)



الف) ۸۴ ب) ۱۲۰ ج) ۱۶۸
د) ۲۴۰ ه) ۱۰۲۴

۲۰- ۲۰ متغیر بولی $q_{i,j}$ $(1 \le j \le 4, 1 \le i \le 5)$ داریم که در شرایط

$$\begin{cases} q_{i,j} \Rightarrow q_{i+1,j} & i < 5 \\ q_{i,j} \Rightarrow q_{i,j+1} & j < 4 \end{cases}$$

صدق می‌کنند. به چند طریق می‌توان به این متغیرها مقادیر « درست» و «غلط» داد؟

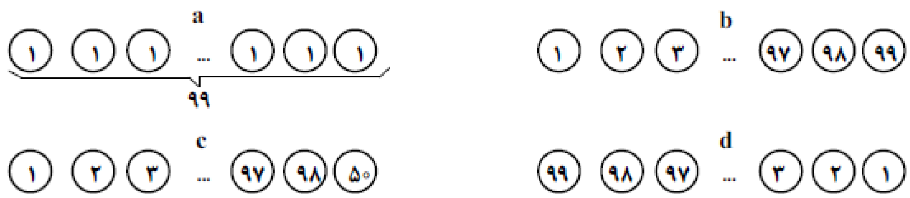
الف) ۱۲۶ ب) ۱۲۷ ج) ۱۲۸ د) ۱۲۹ ه) ۱۳۰

۲۱- مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ مفروض است. T یک تابع است که به هر یک از زیرمجموعه‌های S یکی از زیرمجموعه‌هـــای S را نسبت می‌دهد. چند تابع T وجود دارد که دارای خاصیت زیر است؟

$$\forall P, Q \subseteq S : P \subseteq Q \Leftrightarrow T(P) \subseteq T(Q)$$

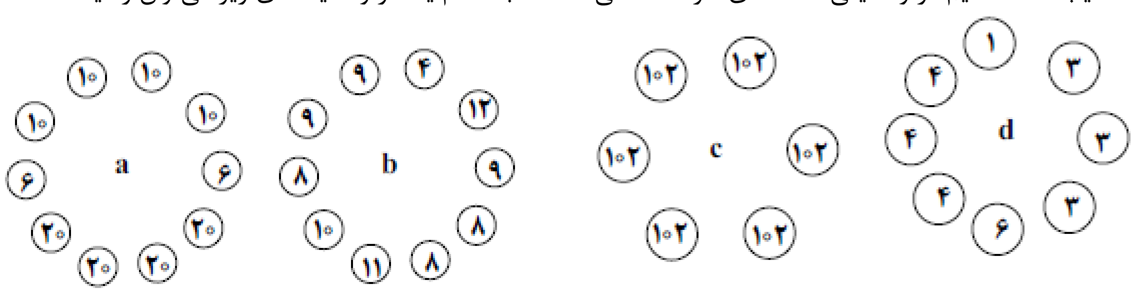
الف) ۲ ب) 2^n ج) $n!$ د) $(2^n)!$ ه) 2^{n2^n}

۲۲- N ظرف با تعدادی سیب در هر یک موجود است، این ظرف‌ها روی یک میز به صورت یک صف قرار گرفته‌اند. هرجا می‌توانیم ۲ ظرف کنار هم را انتخاب می‌کنیــم و از هر کـدام ۱ سیب را بــر می‌داریـم (هــر دو بایـد حـداقل ۱ سیب داشتــه باشـــند)، یا به هرکـدام ۱ سیـب اضـافـه می‌کنیم. با تکرار این کار کدام دو وضعیت زیر به هم قابل تبدیل هستند؟



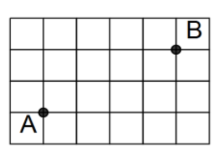
الف) (a، b، c و d)
ب) (a و b) – (c و d)
ج) (a و c) – (b و d)
د) (a و d) – (b و c)
ه) (b، c و d)

۲۳- اگر مسأله‌ی بالا این گونه تغییر کند که ظرف‌ها دور یک میز دایره شکل قرار گرفته‌اند و در هر مرحله فقط می‌توانیـم به ۴ ظرف متوالـی هر کدام ۱ سیب اضافه کنیم، از وضعیتی که همه‌ی ظرف‌ها خالی هستند به کدام یک از وضعیت‌های زیر می‌توان رسید؟



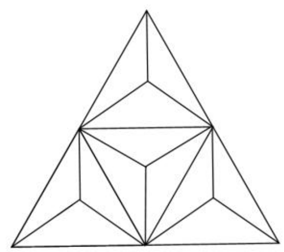
الف) a، b، c و d ب) c و d ج) b، c و d د) a و b ه) a، c و d

۲۴- در شکل مقابل می‌خواهیم از خانه A به B برویم به طوری که تن‌ها روی خطها حرکت کنیم و دقیقاً هشـت حرکـت انجـام دهیـم. در هر حرکت، در یکی از چهـار جهـت اصلی به یـک نقطه‌ی مجاور می‌رویـم. هـم چنین در طول مسیر می‌توان به نقطه‌ی تکرار هم رفت. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



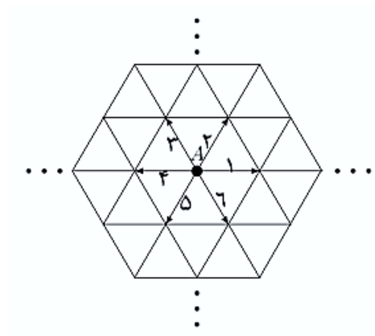
الف) ۱۵ ب) ۱۶۸ ج) ۵۶ د) ۴۴۸ ه) ۳۶۰

۲۵- به چند طریق می‌توان مثلث‌های کوچک را سیاه یا سفید کنیم به طوری که هیچ دو مثلث سیاه مجاور نباشند. (دو مثلث مجاورند اگر ضلع مشترک داشته باشند.)



الف) ۱۰۸ ب) ۱۱۲ ج) ۱۴۴ د) ۱۹۴ ه) ۲۰۸

۲۶- در شکل مقابل یک نفر روی نقطه‌ی A ایستاده است. او در هر حرکت تاس می‌اندازد و باتوجه به شماره‌ی تاس، یک واحد در جهت مربوطه (که در شکل مشخص شده) جلو می‌رود. حال پس از انداختن ۴ تاس به چه احتمالی به نقطه‌ی اول باز می‌گردد (توجه کنید که همه‌ی صفحه مثلث بندی شده است)؟



الف) $\left(\frac{۴}{۶}\right)^{۴}$ ب) $\frac{۵}{۷۲}$ ج) $\frac{۱۲۸}{۶^{۴}}$ د) $\frac{۹}{۱۰۸}$ ه) $\frac{۱۵}{۱۰۸}$

۲۷- خانه‌های یک جدول $m \times n$ به رنگ‌های سیاه و سفید رنگ شده‌اند و در یکی از خانه‌ها، یک مهره قرار دارد. در هر حرکت می‌توانیم مهره را یک خانه به بالا، پایین، چپ یا راست حرکت دهیم، با این شرط که مهره به هر خانه‌ای که وارد شود، رنگ آن خانه را عوض می‌کند (از سفید به سیاه و بالعکس). به ازای کدام یک از گزینه‌های زیر، می‌توان به گونه‌ای خانه‌ها را رنگ کرد و مکان اولیه مهره را مشخص نمود که با انجام تعدادی حرکت نتوان تمامی خانه‌ها را هم رنگ کرد؟

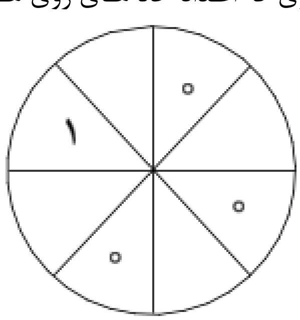
الف) $n = m = ۴$ ب) $n = ۱$ و $m = ۱۶$ ج) $n = m = ۸$

د) $n = ۵$ و $m = ۷$ ه) هم رنگ کردن خانه‌ها همیشه عملی است.

۲۸- در شکل روبه رو در بعضی از خانه‌ها صفر یا یک گذاشته‌ایم. با پرکردن بقیه خانه‌ها (با صفر و یک) به چند شکل مختلف می‌توانیم برسیم؟ (دو شکل را مختلف می گوی‌ام اگر نتوان یکی از مقداری چرخاند و روی دیگری گذارد به نحوی که اعداد خانه‌های روی هم، یکسان باشند. توجه کنید که مجاز به پشت و رو کردن شکل نیستیم.)

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲

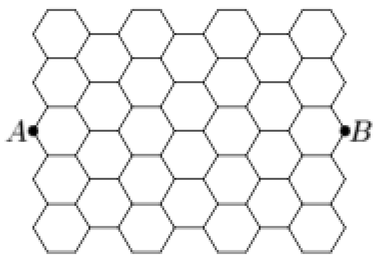
د) ۱۴ ه) ۱۶



۲۹- تعداد زیادی کارت مقوایی ۳ × ۳ که با خطهای افقی و عمودی به مربع‌های ۱ × ۱ تقسیم شده است، به همراه یک میز بزرگ در اختیار داریم. در هر «مرحله» می‌توانیم تعدادی کارت را هم زمان روی میز قرار دهیم به نحوی که این دو شرط رعایت شوند: اولاً کارت‌هایی را که در یک مرحله روی میز می‌گذاریم نباید هیچ قسمتی از یک دیگر را بپوشانند و ثانیاً حداقل یکی از مربع‌های یک در یک هر یک از کارت‌هایی را که در مرحله‌ی i ام می‌گذاریم، باید دقیقاً روی یکی از مربع‌های یک در یک یکی از کارت‌های مرحله‌ی $i-1$ قرار بگیرد. اگر در ابتدا تن‌ها یک کارت روی میز باشد، پس از ۴ مرحله حداکثر چند کارت روی میز خواهد بود؟

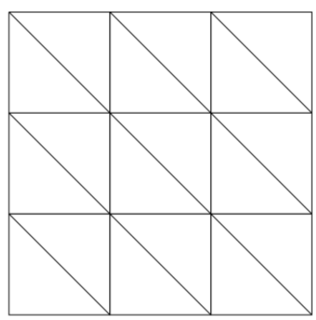
الف) ۵۴ ب) ۵۵ ج) ۸۷ د) ۸۸ ه) ۱۶۵

۳۰- اگر در شکل روبه رو طول اضلاع همه‌ی شش ضلعی‌ها باهم یکسان باشد، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن بین A و B به نحوی که فقط از روی اضلاع شش ضلعی‌ها حرکت کنیم چقدر است؟



الف) ۱۶ ب) ۲۴ ج) ۷۰ د) ۲۵۲ ه) ۲۵۶

۳۱- شکل روبرو یک جدول ۳ × ۳ است که هر مربع آن به دو خانه مثلثی شکل تقسیم شده است. می‌خواهیم در هر مثلث یک عدد بنویسیم به نحوی که تمامی اعداد ۱ تا ۱۸ در جدول ظاهر شده باشند و در هر یک از ۹ مربع اولیه، مجموع اعداد نوشته شده در هر سه مربعی که یک سطر یا ستون جدول ۳ × ۳ را تشکیل می‌دهند، عدد ثابتی شود. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟



الف) $\binom{۱۸}{۹}$ ب) $\frac{۱۸!}{۹!}$ ج) $۹!$ د) $\frac{۲^۹ \times ۱۸!}{۹!}$ ه) $۲^۹ \times ۹!$

۳۲- فرض کنید $S \subseteq \{۱,۲,...,۸\}$. تعریف می‌کنیم $S^* = \{x+۱ | x \in S\}$. اگر تعداد Sهایی که $S \cup S^* = \{۱,۲,...,۹\}$ برابر n باشد، باقیمانده n بر ۵ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۳۳- می‌توان یک دنباله از اعداد را این گونه تغییر داد که ۳ عدد پشت سر هم a، b، و c از دنباله را از دنباله پاک کرد و به جای آن‌ها عدد $a + c - b$ را در همان مکان قرار داد. مثلاً رشته‌ی (۷، ۴، ۸، ۲، ۱) را می‌توان به (۷، ۲ - ، ۱) و همچنین (۷، ۲ - ، ۱) را به (۱۰) تبدیل کرد. حالا کدام یک از رشته‌های زیر را می‌توان به (۰) تبدیل کرد؟

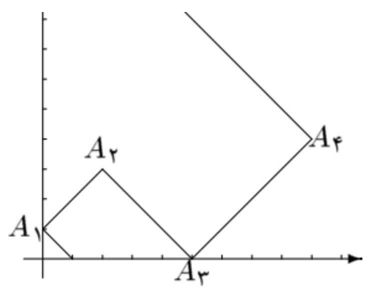
الف) (۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱)
ب) (۱، ۳، ۹، ۴، ۸، ۷، ۱ -، ۴، ۲)
ج) (۵، ۵، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶، ۷، ۷، ۷)
د) (۴، ۷، ۷، ۶، ۳، ۷، ۵، ۷، ۸)
ه) (۶، ۵، ۸، ۹، ۱، ۷، ۳، ۴، ۴)

۳۴- به چند طریق می‌توان خانه‌های خالی را با اعداد ۱، ۲، ۳، و ۴ پر کرد به طوری که در هر سطر و هر ستون هر عدد دقیقاً یک بار آمده باشد؟

۱			
	۱		
		۱	
			۱

الف) ۸ ب) ۱۶ ج) ۲۵ د) ۲۴ ه) ۴۸

۳۵- یک نفر روی نقطه (۰، ۱) علامت می‌گذارد. در حرکات بعدی به ترتیب روی A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 علامت می‌گذارد. اگر روند ادامه یابد، مختصات A_{10} چه خواهد بود؟



الف) (۱۵، ۲۶) ب) (۱۵، ۲۵) ج) (۵، ۶) د) (۲۵، ۵۵) ه) (۲۵، ۲۶)

۳۶- خانه های یک جدول ۳ × ۲، با شش رنگ که با اعداد ۱ تا ۶ شماره گذاری شده‌اند، رنگ شده‌اند. کاغذ را ۳ بار تا می‌زنیم تا در نهایت به یک مربع ۱ × ۱ برسیم، توجه کنید که تا زدن فقط روی خطوط افقی و عمودی جدول مجاز است. حال شش مربع ۱ × ۱ به ترتیبی روی هم قرار گرفته‌اند. کدام یک از رنگ آمیزی های زیر را نمی‌توان ۳ بار تا زد به نحوی که رنگ‌ها به ترتیب ۱ تا ۶ روی هم قرار گرفته باشند؟

(الف)

۵	۳	۲
۶	۴	۱

(ب)

۶	۵	۱
۳	۴	۲

(ج)

۲	۱	۳
۵	۶	۴

(د)

۵	۶	۱
۴	۳	۲

(هـ)

۵	۴	۱
۶	۳	۲

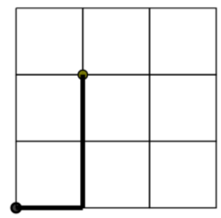
۳۷- یک میدان که به صورت یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ است در مرکز شهر قرار دارد. K گانگستر می‌خواهند به این صورت در این میدان دوئل کنند: هر فرد در یک خانه به دلخواه خودش قرار می‌گیرد (در هر خانه حداکثر ۱ نفر) و اسلحه‌ی خود را به سمت یکی از چهار جهت شمال، جنوب، شرق، و یا غرب نشانه گرفته است. همه در یک لحظه شلیک می‌کنند. اگر بخواهیم هیچ یک از افراد کشته نشوند، k حداکثر چند است؟

الف) n^2 ب) $4n$ ج) $4n-2$ د) $4n-4$ ه) $2n$

۳۸- در یک نظام عددی دودویی، اعداد ۶ رقمی هستند و رقم‌های سوم و ششم علاوه بر دو مقدار ۰ و ۱ می‌توانند ارزش ۱ − را نیز داشته باشند. مثلاً عدد (۱، ۱، ۱ −، ۱، ۰، ۱ −) ارزشی برابر $-25 = 2^0 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^2 \times (-1) + 2^3 \times 1 + 2^4 \times 0 + 2^5 \times (-1)$ دارد. رروی یک تخته، به ازای تمامی این گونه اعداد ۶ رقمی، ارزش معادل آن‌ها را نوشته‌ایم و سپس به ازای هر عدد صحیح i، اگر i حداقل یک بار روی تخته نوشته شده باشد، دقیقاً یکی از iها را پاک می‌کنیم. در نهایت چند عدد روی تخته باقی مانده است؟

الف) ۳۶ ب) ۴۴ ج) ۵۶ د) ۶۳ ه) ۱۰۰

۳۹- در شکل روبرو هر نقطه نماینده‌ی یک کارخانه است. هر کارخانه از کارخانه‌ی بالا و سمت چپ خود (در صورت وجود) کالای اولیه دریافت می‌کند و کالای تولیدی خود را به عنوان کالای اولیه، به کارخانه‌های پایین و سمت راست خود می‌فرستد. اگر یک کارخانه a واحد کالا از کارخانه‌ی بالایی و b واحد کالا از کارخانه‌ی سمت راستی خود دریافت کند، در مجموع $(a + b)$ ۲ واحد کالا تولید می‌کند که نصف آن را به کارخانه‌ی پایینی و نصف آن را به کارخانه‌ی سمت راستی می‌فرستد. فرض کنید کارخانه‌ی A در ابتدا ۲ واحد کالا به کارخانه‌ی سمت راست و ۳ واحد به کارخانه‌ی پایینی خود بفرستد، در نهایت کارخانه‌ی B چند واحد کالا تولید خواهد کرد؟



الف) ۶۰ ب) ۸۵ ج) ۹۰ د) ۱۷۵ ه) ۲۱۰

«پاسخنامه تشریحی»

۱- هر عضوی از U وجودش در سه مجموعهٔ A، B و C یکی از چهار حالت زیر را می‌تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 4^5 یا 2^{10} می‌باشد.

A	B	C
✓	✓	✓
✓	-	-
-	✓	-
-	-	-

۲- اگر خانه‌های موجود در خانه‌های قطر اصلی را به ترتیب با رنگ‌های ۱، ۲، ۳ و ۱ رنگ‌آمیزی کنیم سایر خانه‌ها به ناچار رنگ‌هایی پیدا می‌کنند که به صورت لاتین در جدول نمایش داده شده‌اند.

۱	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۱

۳- حرکت دو دور کامل انجام یافته است که آن را به صورت ردیفی، به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\boxed{1},\underline{2},\underline{3},\underline{4},\underline{5},\underline{6},\underline{7},\boxed{8},1,\boxed{2},\underline{3},\underline{4},\underline{5},\underline{6},\underline{7},\underline{8},\boxed{1}$$

در نمایش فوق $\boxed{x}$ نشانگر آن است که در جایگاه x توقف یقیناً انجام شده است و $\underline{y}$ نشانگر آن است که جایگاه y قابل توقف است. اگر تعداد پرش‌های دور اول صفر باشد آن حرکت به $\binom{6}{0}$؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول یک بار باشد انتخاب آن جایگاه به $\binom{6}{1}$؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد پرش‌های دور اول دو بار باشد انتخاب آن دو جایگاه به $\binom{6}{2}-5$؛ یعنی ۱۰ طریق ممکن است و بالاخره اگر تعداد پرش‌های دور اول سه بار باشد انتخاب آن سه جایگاه به ۴ طریق (۲۴۶ یا ۲۴۷ یا ۲۵۷ یا ۳۵۷) ممکن است که مجموع کل آن طرق برابر ۲۱ می‌شود. معلوم است که تعداد پرش‌های دور اول ۴ یا بیشتر نمی‌تواند باشد. تعداد طرق پرش‌ها در دور دوم مستقل از دور اول نیز برابر ۲۱ می‌شود که طبق اصل ضرب تعداد کل طرق برابر 21×21؛ یعنی ۴۴۱ خواهد شد.

۴- هر مربع واحد یک قطر اصلی و یک قطر فرعی و کل شبکه ۹ قطر اصلی و ۹ قطر فرعی دارد که برای رسیدن به منظور لازم است یک قطر اصلی و یک قطر فرعی رسم شود. انتخاب این دو قطر به $\binom{9}{1}\times\binom{9}{1}$؛ یعنی ۸۱ طریق ممکن است.

۵- یکی از رئوس از درجه‌ی واحد را انتخاب و آن را با یکی از سه رنگ موجود رنگ می‌کنیم. رأس متصل به آن، سپس رأس متصل به دومی و... را به دو طریق می‌توانیم رنگ کنیم، بنابراین تعداد روش‌های مطلوب برابر $2^{11}\times 3$؛ یعنی ۶۱۴۴ خواهد شد.

۶- اگر رنگ‌آمیزی کامل شده باشد با تغییر رنگ هر یک از ۸ نقطه‌ی ردیف اول (فقط یک نقطه) رنگ تمامی نقـــاط بالای آن از جمله رنگ نقطه‌ی موجود در ردیف ۵ تغییر می‌کند، بنابراین در آخرین حرکت که از آنِ مهدی است، او می‌تواند نقطه‌ی آخر از ۸ نقطه‌ی ردیـف اول را چنان رنگ‌آمیزی کند که رنگ نقطه‌ی موجود در ردیف ۵ رنگ مورد دلخواه او باشد.

۷- اگر در خانه‌ی بالا و سمت چپ جدول عدد ۱ و در خانه‌ی پایین سمت راست جدول عدد m+n-۱ را قرار دهیم آنگاه جدول به‌صورت منحصر به فرد، به شکل مقابل پر خواهد شد:

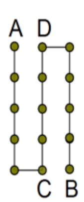
۱	۲	۳	...	n
۲	۳	۴	...	n+۱
۳	۴	۵	...	n+۲
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
m	m+۱	m+۲	...	m+n−۱

۸- در بعضی حالات خاص می‌توان با دانستن اعداد بعضی از خانه‌ها، عدد موجود در خانه‌ای را کشف کرد ولی در حالت کلی جواب مورد نظر برابر mn می‌باشد. برای رد چهار گزینه‌ی دیگر می‌توانید جدول ۲ × ۲ را بررسی کنید.

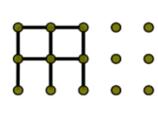
۹- خانه (۱ , ۲) به دو طریق قابل پر شدن می‌باشد (۰ و یا ۲) و هر یک از ستون‌های چهارگانه دیگر متناسب با ستون قبلی خود به سه طریق می‌توانند پر شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲×۳^۴$ یعنی ۱۶۲ می‌باشد.

۱۰- کسی که در نوبتش با ۲ سنگ‌ریزه روبه‌رو شود یکی از آن دو را برداشته و برنده می‌شود. بنابراین به‌ازای n = ۲ نفر اول برنده می‌شود. به‌ازای n = ۳ نفر اول به‌ناچار ۱ سنگ‌ریـزه برداشتـه و نفـر دوم با ۲ سنگ‌ریـزه مواجـه شـده و برنـده می‌شـود. به‌ازای n = ۴ نفر اول ۱ سنگ‌ریزه برداشته و نفر دوم با ۳ سنگ‌ریزه مواجه شده و بازنده می‌شو. به‌ازای n = ۵ نفر اول ۱ سنگ‌ریزه برداشته و نفر دوم با ۴ سنگ‌ریزه مواجه شده و برنده می‌شود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر تعداد سنگ‌ریزه‌ها زوج باشد نفر اول و در غیر این صورت نفر دوم برنده خواهد شد.

۱۱- شکل مقابل شکلی است که از هر نقطه‌ی آن می‌توان به نقطه‌ی دیگری رفته و کمترین پاره‌خط ممکن را نیز داراست (۱۴ پاره‌خط). معلوم است که با حذف هر پاره‌خط دلخواهی از آن دو نقطه یافت خواهند شد که به هم مسیری نداشته باشند، بنابراین لازم اسـت به شکل فـوق یک یا چند پاره‌خط اضافه کنیم. اگر مجاز بودیم از پاره‌خط‌های غیر واحد نیز استفاده کنیم می‌توانستیم A را به B وصل کنیم که در این صورت شکل به دست آمده (پانزده ضلعی فضایی) خاصیت مورد نظر را داشت، ولی چون مجاز به استفاده از پاره‌خط‌های غیر واحد نیستیم به ناچار B را به C و A را به D وصل می‌کنیم که شکل حاصل خاصیت مورد نظر را خواهد داشت و درضمن دارای ۱۶ پاره‌خط به طول واحد می‌باشد.



۱۲- اگر شبکه‌ی مقابل را چهار بار به ماشین بدهیم شکل مطلوب به دست خواهد آمد.

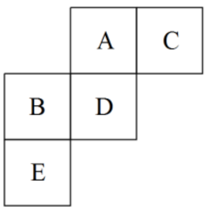


-۱۳ تعداد شهرهایی که هر دو لوله‌اش از یک مرکز باشد ۰، ۲، ۴ یا ۶ می‌تواند باشد که تعداد طرق لوله‌کشی در هر یک از چهار حالت فوق به ترتیب $\binom{۶}{۰}$ $\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}$، $\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}$، $\binom{۳}{۳}\binom{۶}{۳}$ خواهد شد که مجموع تمام آن طرق ۱۴۱ می‌شود.

-۱۴ الگوریتم رسیدن از (۳۵ , ۸۴) به (۴۹ , ۹۱) به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}(۸۴,۳۵) &\to (۴۹,۳۵) \to (۱۴,۳۵) \to (۱۴,۲۱) \to (۱۴,۷)\\ &\to (۲۱,۷) \to (۲۸,۷) \to (۳۵,۷) \to (۴۲,۷)\\ &\to (۴۲,۴۹) \to (۹۱,۴۹)\end{aligned}$$

-۱۵ دو حالت زیر پیش می‌آید:



I) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۲ باشد که در این حالت آن دو خانه را به !۲ و سه خانه‌ی دیگر را به !۳ طریق می‌توان پر کرد که کل حالات !۳×!۲؛ یعنی ۱۲ می‌شود.

II) در خانه‌های A و B دو عدد ۱ و ۳ باشد که در این حالت آن دو خانه را به !۲ طریق می‌توان پر کرد (مثلاً A=۱ و B = ۳). عدد ۲ وابسته به این که A=۱ یا B =۳ به صورت منحصر به فرد در یک خانه به ترتیب در C یا E قرار خواهد گرفت و دو عدد ۴ و ۵ نیز به دو حالت در خانه‌های باقی‌مانده می‌توانند قرار گیرند. بنابراین در این حالت نیز تعداد کل حالات ۲ × ۲؛ یعنی ۴ می‌شود.

با توجه به دو قسمت قبل تعداد کل جواب‌ها ۴ + ۱۲؛ یعنی ۱۶ می‌شود.

-۱۶ می‌دانیم تعداد کل جایگشت‌ها برابر !۷ می‌باشد. در $\frac{۱}{۷}$ از جایگشت‌ها رقم اول ۱، در $\frac{۱}{۷}$ از آنها رقم اول ۲، ... و بالاخره در $\frac{۱}{۷}$ از جایگشت‌ها رقم اول ۷ می‌باشد که در این صورت $\sum|\pi_i - i|$ بر رقم اول کل جایگشت‌ها $(۶+...+۲+۱+۰)\times۶!$؛ یعنی $۲۱\times۶!$ خواهد شد. این مجموع بر ارقام دوم، سوم، ...و هفتم نیز به ترتیب برابر ۱۶، ۱۳، ۱۲، ۱۳، ۱۶ و ۲۱ می‌باشد، بنابراین:

$$\overline{x} = \frac{\sum|\pi_i - i|}{۷!} = \frac{۶!\times(۲۱+۱۶+۱۳+۱۲+۱۳+۱۶+۲۱)}{۷!} = ۱۶$$

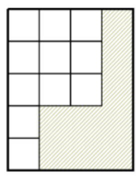
-۱۷ ابتدا سه عدد از هفت عدد را به $\begin{bmatrix}۷\\۳\end{bmatrix}$؛ یعنی ۳۵ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۱، ۴ و ۷ قرار می‌دهیم، سپس دو عدد از چهار عدد را به $\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ یعنی ۶ طریق انتخاب کرده و آنها را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۲ و ۵ قرار می‌دهیم، و در نهایت نیز دو عدد باقی‌مانده را به ترتیب صعودی در خانه‌های ۳ و ۶ قرار می‌دهیم. بنابراین جواب مورد نظر ۶ × ۳۵؛ یعنی ۲۱۰ می‌باشد.

-۱۸ گزینه درست (؟!)

-۱۹ فرض می‌کنیم حرکت اول به سمت راست باشد در این صورت برای رسیدن به BC ده واحد طی خواهد شد که آن را به صورت aaaaaaaaaa نمایش می‌دهیم. هدف قرار دادن سه علامت به نشانه مکان‌های تغییر جهت در بین a ها می‌باشد که این امر به

$\binom{۹}{۳}$؛ یعنی ۸۴ طریق امکان پذیر است (بین هر دو aی متوالی یک جا خالی برای قرار دادن مکان نما وجود دارد و بین ده عدد a مجموعاً نه جا خالی وجود دارد). اگر حرکت اول به سمت بالا باشد نیز برای رسیدن به BC به ۸۴ طریق می‌توان عمل کرد که مجموع کل مسیرهای مطلوب ۸۴ + ۸۴؛ یعنی ۱۶۸ خواهد شد.

۲۰- گزاره‌های درست را با خانه‌ی سیاه و گزاره‌های غلط را با خانه‌ی سفید نمایش می‌دهیم (مانند شکل زیر). با ارتفاع خانه‌های سیاه ستون‌ها یک دنباله‌ی چهار عضوی می‌سازیم. دنباله‌ی متناظر به شکل ارائـه شـده ۵ , ۲ , ۲ , ۰ می‌باشـد، معلـوم است که با شرایط مسأله همه‌ی دنباله‌های به دست آمده صعودی خواهند بود. تعداد ۰ های دنباله را $x_۰$، تعداد ۱های دنباله را $x_۱$، ... و بالاخره تعداد ۵های دنباله را $x_۵$ می‌نامیم که در این صورت به معادله‌ی $x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۴$ می‌رسیم که در مجموعه اعداد نامنفی $\binom{۹}{۵}$؛ یعنی ۱۲۶ جواب دارد، به ازای هر جوابی از معادله‌ی صعودی و به ازای هر دنباله‌ای صعودی یک جواب مطلوب برای جدول به دست می‌آید.



۲۱- به راحتی قابل درک است که $T(\phi) = \phi$ و $T(S) = S$. حاصل $T(\{۱\}), T(\{۲\}), T(\{۳\}), T(\{۴\}), T(\{۵\})$ و $T(\{۶\})$ را به دلخـواه {۱}، {۲}، {۳}، {۴}، {۵}، {۶} در نظـر مـی‌گیریـم کـه ایـن کـار به !۶؛ یعنـی ۷۲۰ طریـق ممکـن اسـت. حـال اگـر فـرض کنیـم $T(\{x_۱\}) = \{y_۱\}, T(\{x_۲\}) = \{y_۲\}, \dots, T(\{x_n\}) = \{y_n\}$، از مجموعه‌های دو عضوی به بعد عضو متناظر به هر زیر مجموعه به صورت منحصر به فرد به شکل زیر پیدا می‌شود:

$$T(\{x_{i_۱}, x_{i_۲}, \dots, x_{i_k}\}) = \{y_{i_۱}, y_{i_۲}, \dots, y_{i_k}\}$$

۲۲- در هر مرحله دو گردو به کل گردوها اضافه و یا دو گردو از کل گردوها کم می‌شود، بنابراین اگر کل گردوها فرد باشد در نهایت نیز فـرد، و اگر کل گردوها زوج باشد در نهایت نیز کل گردوها زوج خواهد بود. مجموع کل گردوهـا در حالات a، b، c و d به ترتیب فـرد، زوج، فـرد و زوج می‌باشد، بنابراین a به b، a به d، c به b و c به d قابل تبدیل نیستند. و اما a به c و نیز b به d قابل تبدیلند که نحوه‌ی تبدیـل هـر یـک به شکل زیر می‌باشد:

نحوه‌ی تبدیل a به c: اولی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

- اولی، دومی و سومی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.
- اولی، دومی، سومی، چهارمی و پنجمی را رد کرده و پس از آن هر زوج متوالی را انتخاب کرده و گردو به آنها اضافه می‌کنیم.

اگر الگوریتم فوق را ادامه دهیم به حالت c خواهیم رسید.

نحوه‌ی تبدیل b به d: زوج‌های (۲ , ۱)، (۴ , ۳)، ...، (۵۰ , ۴۹)، (۵۱ , ۵۰)، (۵۳ , ۵۲)، ...، (۹۹ , ۹۸) را انتخاب کرده و به هر یک از اعضای ۲۵ زوج اول یک گردو اضافه و از هر یک از اعضای ۲۵ زوج دیگر یک گردو بر می‌داریم که به دنباله‌ی زیر خواهیم رسید:

۲, ۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷, ۹۸

- زوج‌های (۳ , ۲)، (۵ , ۴)، ...، (۴۹ , ۴۸) را انتخاب کـرده و به هـر یـک از اعضـای آن زوج‌هـا یک گـردو اضافـه و زوج‌هـای (۵۲ , ۵۱)، (۵۴ , ۵۳)، ...، (۹۸ , ۹۹) را انتخاب کرده و از هر یک از اعضای آن یک گردو برمی‌داریم که به دنباله‌ی زیر خواهیم رسید:

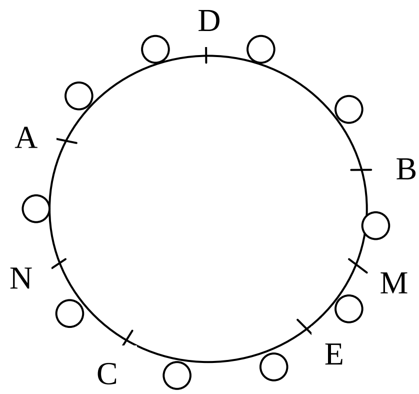
۳, ۴, ۵, ..., ۴۹, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۰, ۵۱, ..., ۹۵, ۹۶, ۹۷

با تکرار الگوریتم فوق پس از مدتی به دنباله‌ی متقارن زیر می‌رسیم:

۵۰ , ۵۱, ۵۰ , ..., ۵۰ , ۵۱, ۵۰ , ۵۱, ۵۰ , ۵۰ , ۵۰ , ۵۱, ۵۰ , ۵۱, ۵۰, ..., ۵۰, ۵۱, ۵۰

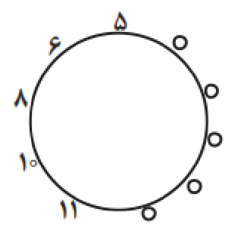
باز با تکرار آن الگوریتم به دنباله‌ی d خواهیم رسید.

۲۳- برای تولید a هر یک از کمان‌های AB، BC، CD، DE و EA سه بار و سپس کمان AB را ۴ بار دیگر و کمان MN را ۱۴ بار انتخاب می‌کنیم.

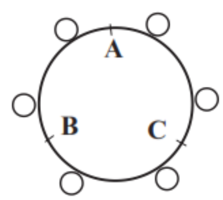


وضعیت b قابل تولید نیست.

کمان‌هایی که شامل هر دو خانه ۱۲ و ۴ باشند مجموعاً حداکثر ۴ بار به کار می‌روند. بنابراین کمان‌هایی که شامل ۱۲ بوده ولی شامل ۴ نباشند حداقل برابر ۸ می‌باشد (چنین کمانی فقط کمانی می‌تواند باشد که هر چهار عدد ۱۲، ۹، ۸ و ۸ را در بر دارد).

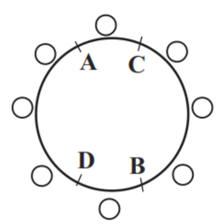


بنابراین کمان یاد شده دقیقاً ۸ بار و کمان ۹ و ۱۲ و ۴ و ۹ دقیقاً ۱ بار به کار می‌رود. اگر گردوهای اضافه شده را کم کنیم به حالت مقابل می‌رسیم که قابل تولید نیست.



برای تولید وضعیت c هر یک از کمان‌های بزرگ AB، BC و CA را ۵۱ بار انتخاب می‌کنیم.

برای تولید وضعیت d کمان سمت راست AB را ۱ بار، کمان سمت راست CD را ۲ بار و بالاخره کمان سمت چپ AB را ۴ بار انتخاب می‌کنیم.



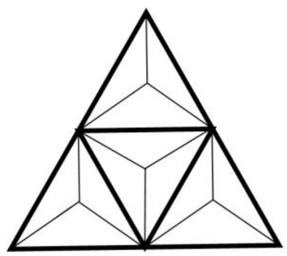
۲۴- برای رسیدن از A به B یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

I) چهار حرکت راست (R)، یک حرکت پایین (L) و سه حرکت بالا (U). تعداد دنباله‌های متشکل از چهار R، یک L و سه U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر $\binom{4}{4}\binom{7}{3}\binom{8}{1}$ ؛ یعنی ۲۸۰ می‌باشد.

II) پنج حرکت راست (R)، یک حرکت چپ (L) و دو حرکت بالا (U). تعداد دنباله‌های متشکل از پنج R، یک L و دو U که هر دنباله متناظر به یک مسیر مطلوب می‌باشد برابر $\binom{2}{2}\binom{7}{5}\binom{8}{1}$ ؛ یعنی ۱۶۸ می‌باشد.

معلوم است که تعداد کل مسیرهای مطلوب برابر ۱۶۸ + ۲۸۰؛ یعنی ۴۴۸ می‌باشد.

۲۵- با در نظر گرفتن ۴ مثلث پر رنگ در شکل زیر حالات زیر پیش می‌آید:



I) تعداد مثلث‌های سیاه صفر باشد که این کار به $\binom{12}{0}$؛ یعنی ۱ طریق ممکن است.

II) تعداد مثلث‌های سیاه یک باشد که این کار به $\binom{12}{1}$؛ یعنی ۱۲ طریق ممکن است.

III) تعداد مثلث‌های سیاه دو باشد که در این صورت آن دو مثلث نمی‌توانند در داخل یک مثلث پر رنگ قرار گیرند. رنگ کردن دو مثلث با شرط فوق به $\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{2}-3$؛ یعنی ۵۱ طریق ممکن است.

IV) تعداد مثلث‌های سیاه ۳ باشد که در این صورت آن سه مثلث در داخل سه مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\binom{6}{1}\binom{3}{1}-\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{4}{3}$؛ یعنی ۹۰ طریق امکان پذیر است.

V) تعداد مثلث‌های سیاه ۴ باشد که در این صورت آن چهار مثلث در داخل چهار مثلث پر رنگ متمایز قرار داشته و به $\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}$؛ یعنی ۵۴ طریق ممکن است.

مجموع کل حالات به دست آمده ۵۴ + ۹۰ + ۵۱ + ۱۲ + ۱؛ یعنی ۲۰۸ می‌شود.

۲۶- برای آن که شخص پس از ۴ حرکت به نقطه‌ی A برگردد باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیافتد:

I) شخص روی یک لوزی حرکت کند. احتمال آن که حرکت اول، دوم، سوم و چهارم شخص مطلوب باشد به ترتیب $\frac{6}{6},\frac{4}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$ می‌باشد که

در این صورت احتمال رسیدن به مقصد با طی کردن یک لوزی برابر $\frac{۶}{۶}\times\frac{۴}{۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$؛ یعنی $\frac{۴}{۲۱۶}$ خواهد بود.

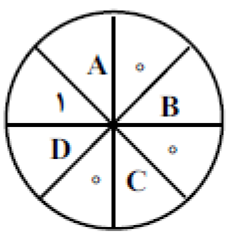
II) شخص یک پاره‌خط به طول ۲ (نه لزوماً پاره‌خط راست) را طی کرده و همان مسیر را برگردد که در این صورت احتمال مطلوب بودن حرکات اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر $\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۶},\frac{۵}{۶},\frac{۶}{۶}$ خواهد بود. بنابراین احتمال رسیدن به مقصد به طریق اشاره شده برابر $\frac{۶}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$؛ یعنی $\frac{۵}{۲۱۶}$ خواهد بود.

III) ابتدا شخص یکی از ۶ پاره‌خط اطراف خود را به صورت رفت و برگشت طی کرده و سپس همین عمل را با همان پاره‌خط یا با پاره‌خط دیگر تکرار کند، که در این صورت احتمال مطلوب بودن هر یک از حرکات چهارگانه او به ترتیب $\frac{۱}{۶},\frac{۶}{۶},\frac{۱}{۶},\frac{۶}{۶}$ و در کل $\frac{۶}{۲۱۶}$ می‌باشد.

با در نظر گرفتن سه حالت ممکن احتمال رسیدن به مقصد $\frac{۶}{۲۱۶}+\frac{۵}{۲۱۶}+\frac{۴}{۲۱۶}$؛ یعنی $\frac{۱۵}{۲۱۶}$ یا $\frac{۵}{۷۲}$ می‌باشد.

۲۷- اگر بخواهیم رنگ خانه‌ای عوض شود از خانه‌ی مجاور آن به آن وارد شده و از آن خارج می‌شویم و اگر خانه‌ای خانه‌ی گذر باشد و نخواهیم رنگ آن عوض شود به آن وارد شده و پس از خروج از آن دوباره به آن خانه برگشته و خروج از آن را تکرار می‌کنیم.

۲۸- هر یک از خانه‌های A، B، C و D را به دو طریق می‌توان پر کرد. بنابراین تعداد کل شیوه‌ها برابر $۲^۴$؛ یعنی ۱۶ می‌شود. اما حالت (۰, ۰, ۰, ۱) برای (A ،B ،C ،D) مانند حالت (۱, ۰, ۰, ۰) و حالت (۰, ۱, ۰, ۰) مانند حالت (۰, ۰, ۱, ۰) می‌باشد. بنابراین جـواب مطلوب ۱۴ می‌باشد.

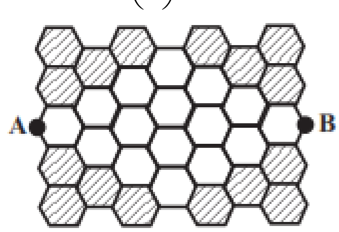


۲۹- در مرحله‌ی اول ۴، در مرحله‌ی دوم ۹، در مرحله‌ی سوم ۲۵ و در مرحله‌ی چهارم ۳۶ کارت می‌توان بر روی میز با شرایط مسأله قرار داد که در این صورت تعداد کل کارت‌ها برابر ۳۶+۲۵+۹+۴+۱؛ یعنی ۷۵ خواهد شد.

به راحتی می‌توانید بررسی کنید که تعداد کل کارت‌های روی میز پس از n مرحله برابر عبارت زیر می‌باشد:

$$\left\lfloor\frac{۳}{۳}\right\rfloor^{۲}+\left\lfloor\frac{۷}{۳}\right\rfloor^{۲}+\left\lfloor\frac{۱۱}{۳}\right\rfloor^{۲}+\left\lfloor\frac{۱۵}{۳}\right\rfloor^{۲}+\left\lfloor\frac{۱۹}{۳}\right\rfloor^{۲}+\dots+\left\lfloor\frac{۴n+۳}{۳}\right\rfloor^{۲}$$

۳۰- خانه‌هایی که هاشور خورده‌اند در مسیر مطلوب شرکت ندارند. شکل باقی‌مانده یک شبکه‌ی ۴ × ۴ می‌باشد که تعداد مسیرهای کوتاه موجود از گوشه‌ی چپ و پایین آن به گوشه‌ی راست و بالای آن برابر $\binom{۸}{۴}$؛ یعنی ۷۰ می‌باشد.



۳۱- چون مجموع اعداد موجود در مربع‌های A، B و C با مجموع اعداد موجود در مربع‌های A، D و C برابر است، بنابراین مجموع دو عدد موجود در B با مجموع دو عدد موجود در D برابر است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع دو عدد موجود در یک مربع با مجموع دو عدد موجود در هر مربع دیگری برابر است که این مجموع برابر با ۱۹ می‌باشد. لذا اعداد ۱، ۲، ...، ۱۸ را به ۹ دسته‌ی (۱۸, ۱)، (۱۷, ۲)، ...، (۱۰, ۹) دسته‌بندی کرده و آنها را به !۹ طریق بین ۹ مربع تقسیم کرده و سپس هر زوج را به !۲ طریق در مثلث‌های موجود در هر مربع قرار می‌دهیم. که تعداد کل روش‌ها $2^9 \times 9!$ خواهد شد.

A	B
D	C

۳۲- S باید هر دو عضو ۱ و ۸ را داشته باشد. از بین اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ تعداد می‌توانند در S نباشند، اگر این تعداد برابر ۰ باشد به $\binom{6}{0}$؛ یعنی ۱ طریق ممکن است. اگر این تعداد برابر ۱ باشد به $\binom{6}{1}$؛ یعنی ۶ طریق ممکن است. اگر تعداد مورد نظر ۲ باشد به $\binom{6}{2}-5$ یعنی ۱۰ طریق ممکن است. و بالاخره اگر تعداد اشاره شده برابر ۳ باشد به ۴ طریق ممکن است. یادآوری می‌شود که از هر دو عضو متوالی حداقل یکی در S موجود است. بنابراین تعداد کل حالات برابر ۲۱ می‌باشد.

۳۳- اولاً در هر مرحله دو عضو از اعضای دنباله کم می‌شود، بنابراین برای آن که در انتهای کار فقط یک عدد باقی بماند لازم است تعداد اعضای دنباله فرد باشد. ثانیاً می‌دانیم زوجیت عدد $a+b+c$ با زوجیت عدد $a+c-b$ یکی است، بنابراین برای آن که در انتهای کار عددی زوج باقی بماند لازم است مجموع اعداد زوج باشد. ثالثاً با تکرار عمل اشاره شده صرف نظر از آن که a، b و c کدام سه عدد متوالی باشند عدد نهایی برای دنباله‌ی $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$، عدد $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots - x_8 + x_9$ می‌باشد.

تنها دنباله‌ای از دنباله‌های داده شده که در هر سه شرط فوق صدق می‌کند دنباله‌ی زیر می‌باشد:

(۸, ۷, ۵, ۷, ۳, ۶, ۷, ۷, ۴)

۳۴- سطر اول به !۳ طریق قابل پر شدن می‌باشد. بدون آن که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم جدول مورد نظر مطابق شکل مقابل باشد که در این صورت خانه (۳, ۲) به دو حالت پر می‌شود، یا با ۳ و یا با ۴.

۴	۲	۳	۱
		۱	
	۱		
۱			

در حالت اول جدول به شکل «الف» و در حالت دوم جدول به شکل «ب» در می‌آید.

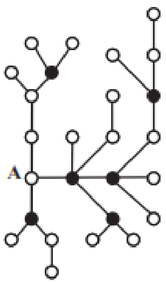
۴	۲	۳	۱
	۴	۱	
	۱		
۱			

شکل الف

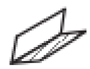
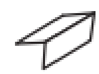
۴	۲	۳	۱
	۳	۱	
	۱		
۱			

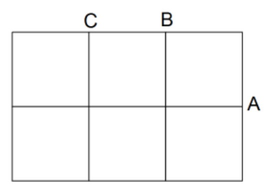
شکل ب

جدول الف فقط به یک حالت ولی جدول ب به سه حالت می‌تواند پر شود، بنابراین جواب مورد نظر $3 \times 3! + 3! \times 1$ یا ۲۴ می‌باشد.



۳۵- هر یک از مؤلفه‌های نقاط سه بار افزایش و یک بار کاهش می‌یابد. مختصات نقاط A_1 A_2 A_3، ...، A_{10} به ترتیب به شکل (۱ , ۰)، (۳ , ۲)، (۰ , ۵)، (۴ , ۹)، (۹ , ۴)، (۱۵ , ۱۰)، (۸ , ۱۷)، (۱۶ , ۲۵)، (۲۵ , ۱۶)، (۳۵ , ۲۶) خواهد بود.

۳۶- خطوط جدول کاغذی را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. طریقه‌ی ساخت گزینه‌های ب، ج، د و هـ را با دنبـالـه نـشـان می‌دهیم، در این نمایش‌ها X؛ یعنی این که کاغذ را از خط X به طرف داخل؛ یعنی به شکل  و x؛ یعنی این که کـاغـذ را از خط X به طـرف بیرون؛ یعنی به شکل  تا کنیم:



ب) Cab

ج) Cba

د) CAb

هـ) Abc

۳۷- بهترین حالت ممکن آن است که دورتادور شبکه، ششلول‌بندها ایستاده و هرکدام از آنها به سمت بیرون شلیک کنند که در این صورت تعداد آنها برابر $n^2-(n-2)^2$؛ یعنی ۴n-۴ خواهد شد.

۳۸- بزرگترین عدد ساخته شده ۶۳ و کوچکترین عدد ساخته شده ۳۶- می‌باشد و همه‌ی اعداد صحیح بین ۳۶- تا ۶۳ را نیز می‌توان ساخت. پس ۱۰۰ عدد متمایز با شرایط داده شده ساخته می‌شوند؛ یعنی از تخته ۱۰۰ عدد پاک شده است در حالی که تعداد اعداد نوشته شده بر روی تخته ۲ × ۲ × ۳ × ۲ × ۲ × ۳؛ یعنی ۱۴۴ می‌باشد، بنابراین ۱۰۰ − ۱۴۴؛ یعنی ۴۴ عدد بر روی تخته باقی می‌ماند.

۳۹- اگر مقدار کالای تحویلی به راست و پایین از کارخانه‌ی A را به ترتیب a و b بنامیم آنگاه اگر مقدار کالای اضافه شده به خاطر a در هر یک از ۴۹ نقطه‌ی موجود را به صورت xa نمایش دهیم، در هر یک از آن ۴۹ نقطــه مقــدار x به شکل زیر پیدا می‌شـود کـه در جـدول ارائه شده هر عدد برابر مجموع دو عدد بالا و سمت چپ خود می‌باشد (غیر از ستون و سطر آخر)

۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۰
۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۰
۰	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۰
۰	۱	۵	۱۵	۳۵	۷۱	۰
۰	۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	

مجموع کل اعداد جدول فوق برابر ۴۶۱ می‌شود. برای b نیز جدولی مشابه جدول فوق یافت می‌شود. با در نظر گرفتن a و b اولیه مقدار ماده‌ی دریافتی توسط B برابر $(a+b)\times ۴۶۲$؛ یعنی ۲۳۱۰۰ می‌شود که با توجه به صورت مساله مقدار کالای تولیدی ۲ × ۲۳۱۰۰؛ یعنی ۴۶۲۰۰ به دست می‌آید.